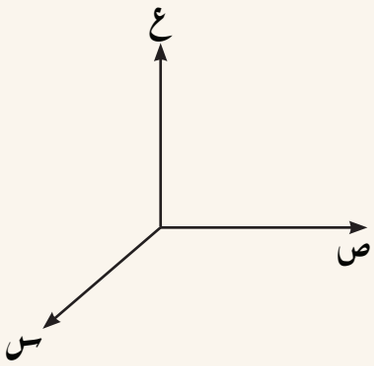
النظام ثلاثي الأبعاد



- (س ، ص ، ٠) ← تقع في المستوى س ص
- (س ، ٠ ، ع) ← تقع في المستوى س ع
- (٠ ، ص ، ع) ← تقع في المستوى ص ع

. . . . . .

- (س ، ٠ ، ٠) ← تقع على محور السينات
- (٠ ، ص ، ٠) ← تقع على محور الصادات
- (٠ ، ٠ ، ع) ← تقع على محور ع

. . . . . .

النقطة التي تقع في الفراغ

لها إحداثيات ≠ ٠

م (٥ ، ٣ ، ٤)

بعد نقطة عن مستوى

م (٣ ، ٥ ، -٢)

- تبعد عن المستوى س ص مسافة |ع| = |-٢| = ٢
- تبعد عن المستوى ص ع مسافة |س| = |٣| = ٣
- تبعد عن المستوى س ع مسافة |ص| = |٥| = ٥

بعد نقطة عن محور

م (٣ ، ٥ ، -٢)

- تبعد عن محور س = $\sqrt{\text{ص}^2 + \text{ع}^2}$ = $\sqrt{٢٥ + ٤}$ = $\sqrt{٢٩}$ وحدة طول
- تبعد عن محور ص = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ع}^2}$ = $\sqrt{٩ + ٤}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول
- تبعد عن محور ع = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ = $\sqrt{٩ + ٢٥}$ = $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول

. . . . . .

مثال م (٣ل ، ٣ + ل ، ٥ل) ∈ لمحور ص ، فأوجد : ل

الحل

س = ٠ ، ع = ٠ ، ٣ل = ٠ ∴ ل = صفر

٥ل = ٠ ∴ ل = صفر

∴ النقطة م (٠ ، ٣ ، ٠)

مثال م (٢ + ك ، ٤ك ، -ك) تبعد ٥ وحدات عن مستوى ص ع

الحل

|س| = ٥ ∴ |٢ + ك| = ٥ ٢ + ك = ± ٥

٢ + ك = ٥ ⟸ ∴ ك = ٣ ، ٢ + ك = -٥ ⟸ ∴ ك = -٧

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

البعد بين نقطتين

أ (س١ ، ص١ ، ع١)　　ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

أ = (٣ ، ٤ ، -١)
ب = (-٢ ، ١ ، ٥)

$$أب = \sqrt{(٣ + ٢)^٢ + (٤ - ١)^٢ + (-١ - ٥)^٢} = \sqrt{٢٥ + ٩ + ٣٦} = \sqrt{٧٠}$$

لإثبات: النقاط تقع على استقامة واحدة أ ، ب ، جـ

هنجيب أ ب ، ب جـ ، أ جـ ، وهيكون مجموع أصغر بعدين = البعد الأكبر

. . . . . .

لمعرفة نوع Δ بالنسبة لزواياه

هنجيب أ ب ، ب جـ ، أ جـ ، وبعدين أربعهم (وبفرض ان أجـ هو الكبير)

- $(أب)^٢ + (ب حـ)^٢ = (أحـ)^٢$ ← Δ ∴ قائم الزاوية في ب
- $(أحـ)^٢ > (أب)^٢ + (ب حـ)^٢$ ← Δ ∴ منفرج الزاوية في ب
- $(أحـ)^٢ < (أب)^٢ + (ب حـ)^٢$ ← Δ ∴ حاد الزوايا

. . . . . .

منتصف قطعة مستقيمة

أ (س١ ، ص١ ، ع١)　　ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

$$منتصف\ أب = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢} \right)$$

. . . . . .

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المتجهات في الفراغ

١ القطعة المستقيمة الموجهة

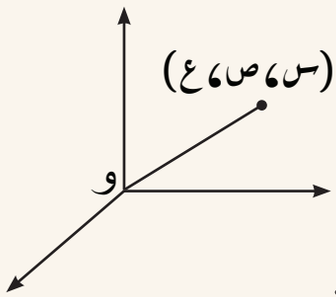
لها بداية ولها نهاية ولها اتجاه

$\overrightarrow{أب}$

.....

متجه الموضع

قطعة مستقيمة موجهة بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة المعلومة



$\overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{أ} = (٣، ٤، ٥)$

.....

معيار المتجة

$||\overrightarrow{أ}|| = \sqrt{س^٢ + ص^٢ + ع^٢}$

.....

جمع المتجهات جبريًا

$\overrightarrow{أ} = (٢، ٣، -١)$ $\quad$ $\overrightarrow{ب} = (٥، ١، -٤)$

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (٧، ٤، -٥)$ $\quad$ $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (-٣، ٢، ٣)$

.....

ملحوظة هامة

$||\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}|| \leq ||\overrightarrow{أ}|| + ||\overrightarrow{ب}||$

.....

ضرب عدد حقيقي في المتجه

$\overrightarrow{أ} = (٣، -٢، ٥)$ $\quad$ $٢\overrightarrow{أ} = (٦، -٤، ١٠)$ $\quad$ $-٢\overrightarrow{أ} = (-٦، ٤، -١٠)$

.....

خلي بالك ...

$\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

المتجهان متساويان في المقدار ولهما نفس الاتجاه ومتوازيان

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

$\overleftarrow{P} = ٢\overleftarrow{ن}$

المتجهان متوازيان ولهما نفس الاتجاه وغير متساويان في المعيار

$\overleftarrow{P} = -٢\overleftarrow{ن}$

المتجهان متوازيان وعكس بعض في الاتجاه وغير متساويان في المعيار

. . . . . .

متجه الوحدة

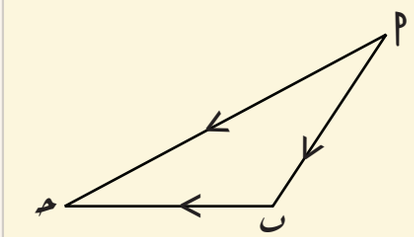
هو متجه معياره ١

$\overleftarrow{P} = (\frac{٣}{٥}، \frac{-٢}{٥}، \frac{\sqrt{٣٢}}{٥})$

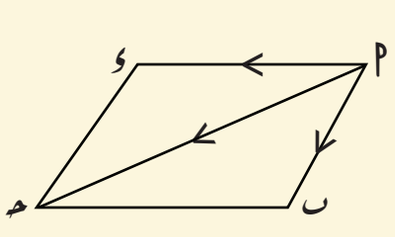
$\|\overleftarrow{P}\| = \sqrt{\frac{٩}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥} + \frac{١٢}{٢٥}} = ١$

. . . . . .

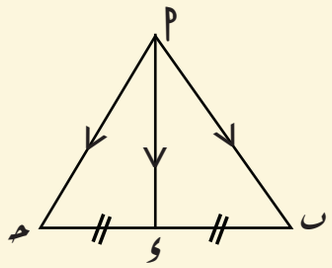
قـــاعدة شـــال



$\overleftarrow{P ن} + \overleftarrow{ن حـ} = \overleftarrow{P حـ}$



$\overleftarrow{P ن} + \overleftarrow{P ء} = \overleftarrow{P حـ}$



$\overleftarrow{P ن} + \overleftarrow{P حـ} = ٢\overleftarrow{P ء}$

. . . . . .

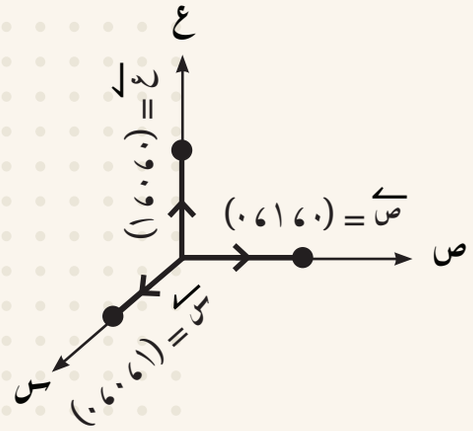
ملحوظة هامة

$\|\overleftarrow{ك P}\| = |ك| \|\overleftarrow{P}\|$

$\|-٥\overleftarrow{P}\| = ٥\|\overleftarrow{P}\|$ ، $\|٣\overleftarrow{P}\| = ٣\|\overleftarrow{P}\|$

. . . . . .

متجهات الوحدة الأساسية



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال $\overleftarrow{P} = (٣، ٤، ٥)$ اكتب بدلالة متجهات الوحدة الأساسية $\overleftarrow{P} = ٣\overleftarrow{س} + ٤\overleftarrow{ص} + ٥\overleftarrow{ع}$

الحل

$\overleftarrow{P} = (٣، ٠، ٠) + (٠، ٤، ٠) + (٠، ٠، ٥)$

$\overleftarrow{P} = ٣(١، ٠، ٠) + ٤(٠، ١، ٠) + ٥(٠، ٠، ١)$

$\overleftarrow{P} = ٣\overleftarrow{س} + ٤\overleftarrow{ص} + ٥\overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{P} = (٥، ٣، ٠) \Longleftarrow \overleftarrow{P} = ٥\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{P} = (٣، ٠، ٠) \Longleftarrow \overleftarrow{P} = ٣\overleftarrow{س}$

. . . . . .

للتعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة بدلالة متجهي الموضع

$\overleftarrow{P ب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{P}$ $\qquad$ $\overleftarrow{س ص} = \overleftarrow{ص} - \overleftarrow{س}$

. . . . . .

متجه الوحدة في اتجاه معلوم

متجه الوحدة $\overleftarrow{ى_P} = \dfrac{\overleftarrow{P}}{||\overleftarrow{P}||}$

مثال $\overleftarrow{P} = (-٢، ٢، -١) \Longleftarrow$ هات منه $\overleftarrow{ى_P} = \dfrac{\overleftarrow{P}}{||\overleftarrow{P}||}$

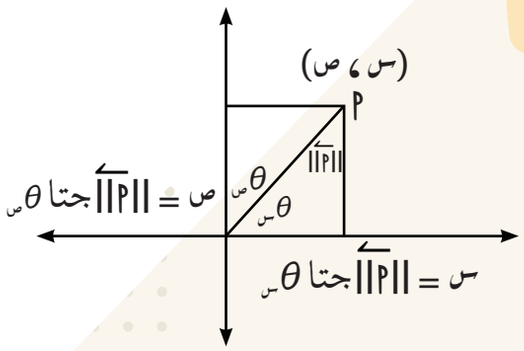
الحل

$$\overleftarrow{ى_P} = \frac{(-٢، ٢، -١)}{\sqrt{٤+٤+١}} = (\frac{-٢}{٣}، \frac{٢}{٣}، \frac{-١}{٣})$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

زوايا الاتجاه وجيوب تمام زوايا الاتجاه لمتجه في الفراغ

$\overleftarrow{P} = (س ، ص ، ع)$



وبالمثل

(١) $س = \overleftarrow{||P||}$ جتا $\theta_س \Longleftarrow$ جتا $\theta_س = \frac{س}{\overleftarrow{||P||}}$

(٢) $ص = \overleftarrow{||P||}$ جتا $\theta_ص \Longleftarrow$ جتا $\theta_ص = \frac{ص}{\overleftarrow{||P||}}$

(٣) $ع = \overleftarrow{||P||}$ جتا $\theta_ع \Longleftarrow$ جتا $\theta_ع = \frac{ع}{\overleftarrow{||P||}}$

. . . . . .

لاحظ ..

(جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$) هي مركبات متجه وحده فى اتجاه المتجه

($\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) هي جيوب تمام زوايا اتجاه لمتجه فإنها تعبر متجه وحده في اتجاه المتجه

. . . . . .

ملحوظة هامة

- $\overleftarrow{P} = (س ، ص ، ع)$
- $\overleftarrow{P} = \overleftarrow{||P||}$ جتا $\theta_س \overleftarrow{س} + \overleftarrow{||P||}$ جتا $\theta_ص \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{||P||}$ جتا $\theta_ع \overleftarrow{ع}$
- $\overleftarrow{P} = \overleftarrow{||P||}$ (جتا $\theta_س \overleftarrow{س} + \overleftarrow{||P||}$ جتا $\theta_ص \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{||P||}$ جتا $\theta_ع \overleftarrow{ع}$) (÷ $\overleftarrow{||P||}$)
- $\frac{\overleftarrow{P}}{\overleftarrow{||P||}} = (\text{جتا } \theta_س \overleftarrow{س} + \overleftarrow{||P||} \text{ جتا } \theta_ص \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{||P||} \text{ جتا } \theta_ع \overleftarrow{ع}) = \overleftarrow{ى_P}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

$\therefore \sqrt{\text{جتا}^2\theta_س + \text{جتا}^2\theta_ص + \text{جتا}^2\theta_ع} = 1$

$\text{جتا}^2\theta_س + \text{جتا}^2\theta_ص + \text{جتا}^2\theta_ع = 1$

لاحظ ..

$\text{جا}^2\theta_س + \text{جا}^2\theta_ص + \text{جا}^2\theta_ع = 2$

.....

مثال

أوجد جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{ب} = (2، -2، 2\sqrt{2})$

الحل

هحوله متجه وحدة علطول

$$\overleftarrow{ى_ب} = \frac{\overleftarrow{ب}}{||\overleftarrow{ب}||} = \frac{(2، -2، 2\sqrt{2})}{\sqrt{4+4+8}} = \frac{(2، -2، 2\sqrt{2})}{4} = \left(\frac{1}{2}، \frac{-1}{2}، \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

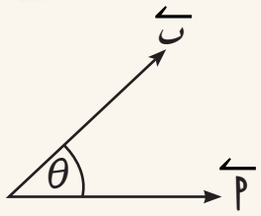
.....

ملحوظات هامة

- زوايا اتجاه محور س أو أي متجه في اتجاهه هي (٠، ٩٠، ٩٠)
- زوايا اتجاه محور ص أو أي متجه في اتجاهه هي (٩٠، ٠، ٩٠)
- زوايا اتجاه محور ع أو أي متجه في اتجاهه هي (٩٠، ٩٠، ٠)
- جيوب تمام اتجاه لمحور س هي (١، ٠، ٠)
- جيوب تمام اتجاه لمحور ص هي (٠، ١، ٠)
- جيوب تمام اتجاه لمحور ع هي (٠، ٠، ١)
- إذا كانت $(\theta_س، \theta_ص، \theta_ع)$ هي زوايا الاتجاه للمتجه ، فإن زوايا الاتجاه للمتجه :
  - $\overleftarrow{ب} = (\theta_س، \theta_ص، \theta_ع)$
  - $-\overleftarrow{ب} = (180 - \theta_س، 180 - \theta_ص، 180 - \theta_ع)$
- إذا كان المتجه يصنع زوايا متساوية مع محاور الاحداثيات ، فإن جيوب تمام زوايا الاتجاه هي $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}، \frac{1}{\sqrt{3}}، \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- مجموع قياس أي زاويتين من زوايا الاتجاه أكبر من أو يساوي ٩٠° إذا كان مجموع قياس زاويتين اتجاه ٩٠° فإن قياس الزاوية الثالثة ٩٠°

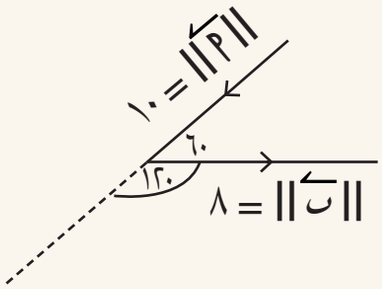
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الضرب القياسي لمتجهين



$\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = ||\overleftarrow{أ}|| \, ||\overleftarrow{ب}|| \, جتا\theta$

$\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = ١٠ \times ٨ \times جتا١٢٠$



$جتا\theta = \dfrac{\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}}{||\overleftarrow{أ}|| \, ||\overleftarrow{ب}||}$ حيث $٠ \leqslant \theta \leqslant ١٨٠^\circ$

حالات الزاوية

- $٠ < \theta < ٩٠^\circ$ ⟸ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} > صفر$
- $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$ ⟸ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} < صفر$
- $\theta = ٩٠^\circ$ ⟸ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = صفر$
- $\theta = صفر$ ⟸ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = ||\overleftarrow{أ}|| \, ||\overleftarrow{ب}||$
- $\theta = ١٨٠^\circ$ ⟸ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = -||\overleftarrow{أ}|| \, ||\overleftarrow{ب}||$

الخواص ..

- **الابدال** $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ}$
- **التوزيع** $\overleftarrow{أ} \cdot (\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{حـ}) = \overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} + \overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{حـ}$
- $ك \overleftarrow{أ} \cdot ل \overleftarrow{ب} = ك ل (\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب})$
- $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{و} = صفر$

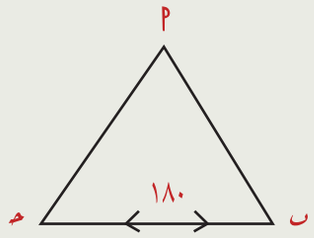
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال

أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٩ سم أوجد:

(١) $\overrightarrow{أب} \cdot (\overrightarrow{أحـ} + \overrightarrow{حـب})$ (٢) $(\overrightarrow{٣ب حـ}) \cdot (\overrightarrow{٤حـ ب})$

الحل



(١) $= \overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أب} = ||\overrightarrow{أب}|| \, ||\overrightarrow{أب}||$ جتا ٠

$= ٩ \times ٩ = ٨١$

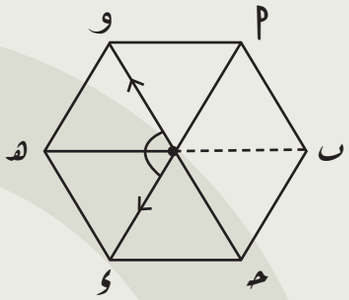
(٢) $= ١٢ (\overrightarrow{ب حـ} \cdot \overrightarrow{حـ ب}) = ١٢ \times ٩ \times ٩ \times$ جتا ١٨٠

$= - ٩٧٢$

مثال

أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ٨ سم أوجد: $(\overrightarrow{حـأ} + \overrightarrow{أو}) \cdot \overrightarrow{أء}$

الحل

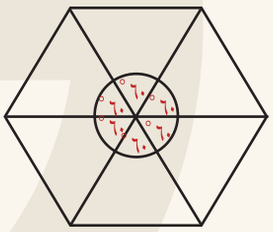


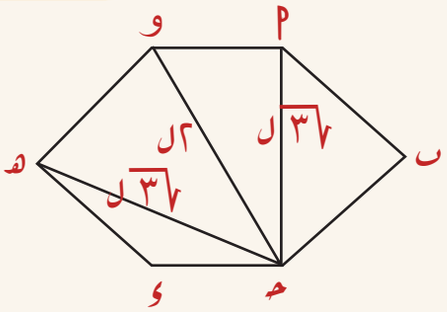
$\overrightarrow{حـو} \cdot \overrightarrow{أء}$

$= ١٦ \times ١٦ \times$ جتا ١٢٠

$= - ١٢٨$

المعيار = ضعف ضلع





الضرب القياسي لمتجهات الوحدة:

$\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{س} = ١ \times ١ \times$ جتا ٠ $= ١$

$\overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{ص} = ١$

$\overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{ع} = ١$

$\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ص} =$ صفر

$\overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{ع} =$ صفر

$\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ع} =$ صفر

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملحوظة خطيرة

$$\|\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}\|^2=(\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}).(\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب})=\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}+\overrightarrow{ب}.\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}.\overrightarrow{ب}$$
$$=\|\overrightarrow{أ}\|^2+2\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}+\|\overrightarrow{ب}\|^2$$

$$\therefore \|\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}\|^2=\|\overrightarrow{أ}\|^2+\|\overrightarrow{ب}\|^2+2\|\overrightarrow{أ}\|\|\overrightarrow{ب}\|\text{جتا}\theta$$
$$=\|\overrightarrow{أ}\|^2+\|\overrightarrow{ب}\|^2+2(\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب})$$

$$\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{أ}=\|\overrightarrow{أ}\|\|\overrightarrow{أ}\|\text{جتا}0$$
$$\therefore \overrightarrow{أ}.\overrightarrow{أ}=\|\overrightarrow{أ}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{هـ}+\overrightarrow{و}\|^2=\|\overrightarrow{هـ}\|^2+\|\overrightarrow{و}\|^2+2(\overrightarrow{هـ}.\overrightarrow{و})$$

الضرب القياسي لمتجهين في النظام الإحداثي المتعامد:

$\overrightarrow{أ}=(٢،٣،٥)$ $\Longleftarrow$ $\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}=٦+١٢-٥=١٣$

$\overrightarrow{ب}=(٣،٤،-١)$

$\overrightarrow{أ}=(٤،٣)$ ، $\overrightarrow{ب}=(٥،-١)$ $\Longleftarrow$ $\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}=١٥-٤=١١$

مثال

أوجد $\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}$ في كلا من الحالات الآتية :

الحل

(١) $\overrightarrow{أ}=(-٢،٣،٥)$ $\overrightarrow{ب}=(٧،٢،-١)$

$\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}=-١٤+٦-٥=-١٣$

(٢) $\overrightarrow{أ}=٣س-٤ص+ع$ $\overrightarrow{ب}=-س+٤ع$

$\overrightarrow{أ}=(٣،-٤،١)$ $\overrightarrow{ب}=(-١،٠،٤)$

$\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}=-٣+٠+٤=١$

(٣) $\overrightarrow{أ}=(٢،-٢،١)$ $\|\overrightarrow{ب}\|=٥$ ، $\theta=٦٠°$

$\|\overrightarrow{أ}\|=\sqrt{٤+٤+١}=٣$

$\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}=\|\overrightarrow{أ}\|\|\overrightarrow{ب}\|\text{جتا}\theta=٣\times٥\times\text{جتا}٦٠=\frac{١٥}{٢}=٧٫٥$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ايجاد الزاوية بين متجهين

$\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{ت} = \|\overrightarrow{P}\| \|\overrightarrow{ت}\| \text{ جتا } \theta$ ∴ جتا $\theta = \dfrac{\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{ت}}{\|\overrightarrow{P}\| \|\overrightarrow{ت}\|}$ $\quad ٠ \leq \theta \leq ١٨٠$

، جتا $\theta = \dfrac{-١}{٢} \Longleftarrow \theta = ١٢٠$

حالات الزاوية

- جتا $\theta = ١ \Longleftarrow \theta =$ صفر ⇜ $\overrightarrow{P}$ يوازى $\overrightarrow{ت}$ في نفس الاتجاه
- جتا $\theta = -١ \Longleftarrow \theta = ١٨٠$ ⇜ $\overrightarrow{P}$ يوازى $\overrightarrow{ت}$ في عكس الاتجاه
- جتا $\theta = ٠ \Longleftarrow \theta = ٩٠$ ⇜ $\overrightarrow{P} \perp \overrightarrow{ت}$

إذا كان $\overrightarrow{P} \perp \overrightarrow{ت}$ فإن $\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{ت} =$ صفر

مثال اوجد قياس الزاويه بين المتجهين

الحل

$\overrightarrow{P} = ٣ س - ٤ ص + \sqrt{١١} ع$ ، $\overrightarrow{ت} = (-١، -٢، ٢)$

∴ جتا $\theta = \dfrac{\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{ت}}{\|\overrightarrow{P}\| \|\overrightarrow{ت}\|} = \dfrac{-٣ + ٨ + ٢\sqrt{١١}}{\sqrt{٩ + ١٦ + ١١} \sqrt{١ + ٤ + ٤}} = \dfrac{٥ + ٢\sqrt{١١}}{١٨} = ٤٩٫٧°$

المركبة الجبرية

مركبة المتجه $\overrightarrow{P}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ت}$ **أو** مسقط $\overrightarrow{P}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ت}$

$\overrightarrow{P} = (٢، ٣، ٤)$ ، $\overrightarrow{ت} = (٥، ١، -١)$

$م_{ل} = \dfrac{\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{ت}}{\|\overrightarrow{ت}\|} = \dfrac{١٠ - ٣ - ٤}{\sqrt{٢٥ + ١ + ١}} = \dfrac{٩}{\sqrt{٢٧}}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المرَكّبة الاتجاهية

المرَكّبة الاتجاهية $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ن}$ = المركّبة الجبرية × متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{ن}$

$$= \frac{\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ن}}{\|\overrightarrow{ن}\|} \times \frac{\overrightarrow{ن}}{\|\overrightarrow{ن}\|} = \left(\frac{\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ن}}{\|\overrightarrow{ن}\|^2}\right) \times \overrightarrow{ن}$$

$\overrightarrow{ن}$ متجه (٢، ٣، ٥)

$\|\overrightarrow{ن}\|^2$ الكمية القياسية

$\overrightarrow{ق} = (٢، ٣، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن} = (٥، ١، -١)$

■ المرَكّبة الاتجاهية $= \frac{\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ن}}{\|\overrightarrow{ن}\|^2} \times \overrightarrow{ن} = \frac{١٠ + ٣ - ٤}{(\sqrt{٢٧})^2} \times (٥، ١، -١)$

$= \frac{١}{٣} (٥، ١، -١) = (\frac{٥}{٣}، \frac{١}{٣}، \frac{-١}{٣})$

الشغل

حاصل ضرب القياسي للقوة في الإزاحة = القوة . الإزاحة

$ش = \overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$

• وحدة القياس
- جول (نيوتن . متر)
- إرج (داين . سم)

مثال

اثرت قوة $ن$ مقدارها $٢\sqrt{٦٧}$ نيوتن وجيوب تمام الاتجاه لها $(\frac{١}{٦٧}، \frac{٢}{٦٧}، \frac{-١}{٦٧})$ على جسيم فحركته من نقطه $أ$ (٢، -٣، ١) إلى نقطه $ب$ (٤، -١، ٥)

اوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$ علمًا بأن الازاحة مقدرة بالمتر.

$س = \|\overrightarrow{أ}\| \text{ جتا } \theta_س$

$ص = \|\overrightarrow{أ}\| \text{ جتا } \theta_ص$

الحل

$\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٢، ٤، ٤)$

$\overrightarrow{ق} = \|\overrightarrow{ق}\| \times$ (متجه وحدة فى اتجاه القوة)

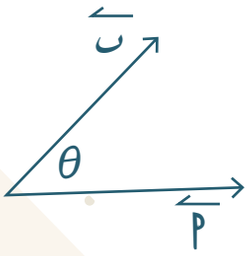
$= ٢\sqrt{٦٧} \times (\frac{١}{٦٧}، \frac{٢}{٦٧}، \frac{-١}{٦٧}) = (٢، ٤، -٢)$

$\therefore ش = \overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$

$= (٢، ٤، -٢) . (٢، ٤، ٤) = ٤ + ٨ - ٨ = ٤$ جول

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الضرب الاتجاهى والثلاثى القياسى



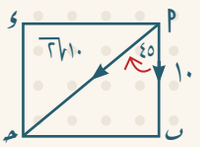
$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (\|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\| \text{جا}\theta)\ \overleftarrow{ى}$

$\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ} = -(\|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\| \text{جا}\theta)\ \overleftarrow{ى}$

لو اتجاه الضرب عكس عقارب الساعة ∴ المتجه موجب لأعلى $\overleftarrow{ى}$

لو اتجاه الضرب مع عقارب الساعة ∴ المتجه سالب لأسفل $(-\overleftarrow{ى})$

$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \neq \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = -(\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ})$

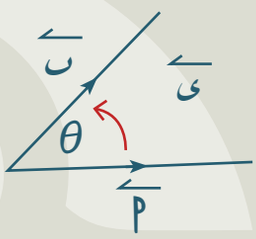


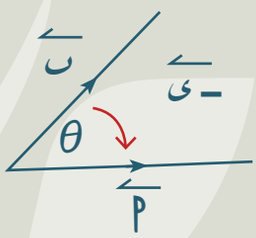
$\overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{أجـ} = -١٠ \times ٢\sqrt{١٠} \times \text{جا}٤٥$

$\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\| = \|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\| \text{جا}\theta$

ملخص

- $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (\|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\| \text{جا}\theta)\ \overleftarrow{ى}$
- $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ} = -(\|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\| \text{جا}\theta)\ \overleftarrow{ى}$
- $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = -\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$
- $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{ب} . \overleftarrow{أ}$
- $\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\| = \|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\| \text{جا}\theta$
- متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ $\overleftarrow{ى} = \dfrac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\|}$
- $\text{جا}\theta = \dfrac{\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|}{\|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\|}$
- $\text{جتا}\theta = \dfrac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{\|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\|}$





موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

خواص الضرب الاتجاهى

التوزيع

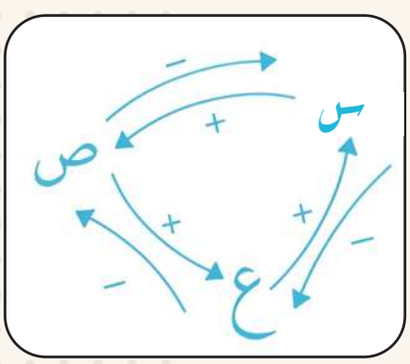
$\overrightarrow{P} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) = \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{حـ}$

لاحظ: الترتيب مهم فى التوزيع

- $(ك \overrightarrow{P}) \times \overrightarrow{ب} = ك(\overrightarrow{P} \times \overrightarrow{ب})$
- $\overrightarrow{P} \times \overrightarrow{P} = \|\overrightarrow{P}\| \|\overrightarrow{P}\| جا٠ = \overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{P} . \overrightarrow{P} = \|\overrightarrow{P}\|^2$
- $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ب} . \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{P}\|^2$
- إذا كان $\overrightarrow{P} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ فإن $\overrightarrow{P} // \overrightarrow{ب}$
- $\overrightarrow{سـ} \times \overrightarrow{سـ} = \overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{سـ} . \overrightarrow{سـ} = ١$
- $\overrightarrow{صـ} \times \overrightarrow{صـ} = \overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{صـ} . \overrightarrow{صـ} = ١$
- $\overrightarrow{عـ} \times \overrightarrow{عـ} = \overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{عـ} . \overrightarrow{عـ} = ١$
- $\overrightarrow{سـ} \times \overrightarrow{صـ} = \overrightarrow{عـ}$ ، $\overrightarrow{سـ} . \overrightarrow{صـ} =$ صفر
- $\overrightarrow{صـ} \times \overrightarrow{عـ} = \overrightarrow{سـ}$ ، $\overrightarrow{صـ} . \overrightarrow{عـ} =$ صفر
- $\overrightarrow{عـ} \times \overrightarrow{سـ} = \overrightarrow{صـ}$ ، $\overrightarrow{عـ} . \overrightarrow{سـ} =$ صفر

$\overrightarrow{سـ} \times \overrightarrow{صـ} = (١ \times ١ جا٩٠) \overrightarrow{عـ}$

- $\overrightarrow{سـ} \times \overrightarrow{صـ} = \overrightarrow{عـ}$
- $\overrightarrow{صـ} \times \overrightarrow{عـ} = \overrightarrow{سـ}$
- $\overrightarrow{عـ} \times \overrightarrow{سـ} = \overrightarrow{صـ}$
- $\overrightarrow{صـ} \times \overrightarrow{سـ} = -\overrightarrow{عـ}$
- $\overrightarrow{عـ} \times \overrightarrow{صـ} = -\overrightarrow{سـ}$
- $\overrightarrow{سـ} \times \overrightarrow{عـ} = -\overrightarrow{صـ}$
- $\overrightarrow{عـ} \times \overrightarrow{سـ} = \overrightarrow{صـ}$



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملحوظة هامة جداً

$$\therefore \text{ظا}\theta = \frac{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|}{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}} = \frac{\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \, \text{جا}\theta}{\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \, \text{جتا}\theta}$$

إذا كان $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{حـ}$ ⟸ فإن $\overrightarrow{أ} \,//\, \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}$

مثال $\|\overrightarrow{أ}\| = ٥$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٨$ ، $\theta = ٣٠°$ أوجد $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|$

الحل

$$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \, \text{جا}\theta = ٥ \times ٨ \times \text{جا}٣٠ = ٢٠$$

مثال إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -٣٥\sqrt{٣}$ ك ، $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٤$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٥$

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحل

$$\text{جا}\theta = \frac{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|}{\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{٣٥\sqrt{٣}}{٥ \times ١٤} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$\therefore \theta = ٦٠$ أول ، $\theta = ١٢٠°$ ثانى

الضرب الاتجاهى لمتجهين فى الصورة الكارتيزية

$\overrightarrow{أ} = (س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$

$\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٤) ، \overrightarrow{ب} = (٢ ، ٥)$

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$$

$= ١٥ - ٨ = ٧$

$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (٣ ، ٤) \times (٢ ، ٥)$

$= ١٥ - ٨ = ٧$

$\overrightarrow{أ} = (٣ ، ١ ، ٢) ، \overrightarrow{ب} = (٤ ، ١ ، -١)$

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٤ & ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$= (-\overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص} + ١٥\overrightarrow{ع}) - (٢٠\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{ع})$

$= -٢١\overrightarrow{س} + ١١\overrightarrow{ص} + ١٣\overrightarrow{ع} = (-٢١ ، ١١ ، ١٣)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

متجه وحدة عمودى على $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ $\qquad \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (-٢١ ، ١١ ، ١٣)$

$$= \frac{(-٢١ ، ١١ ، ١٣)}{\sqrt{(٢١)^{٢} + (١١)^{٢} + (١٣)^{٢}}} = \text{ك}$$

توازي متجهين

$\overleftarrow{أ} = (٢ ، -٤ ، ٥)$ $\qquad \overleftarrow{ب} = ٢ \overleftarrow{أ}$

$\overleftarrow{ب} = (٤ ، -٨ ، ١٠)$ $\qquad \frac{٢}{٤} = \frac{-٤}{-٨} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

س إذا كان المتجه $\overleftarrow{أ} = ٥ \overleftarrow{س} - ٤ \overleftarrow{ص} + م \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٦ \overleftarrow{س} + ل \overleftarrow{ص} - ١٢ \overleftarrow{ع}$
وكان $\overleftarrow{أ} // \overleftarrow{ب}$ أوجد كلاً من ل ، م

الحل

$$\frac{٥}{٦} = \frac{-٤}{ل} = \frac{م}{-١٢}$$

$$\therefore ل = \frac{-٤ \times ٦}{٥} = \frac{-٢٤}{٥}$$

$$م = \frac{-١٢ \times ٥}{٦} = -١٠$$

س إذا كان المتجه $\overleftarrow{أ} = (-١ ، ٢ ، ٢)$ ، $\| \overleftarrow{ب} \| = ٦$ وكان $\overleftarrow{أ} // \overleftarrow{ب}$ أوجد ب

الحل

$\overleftarrow{ب} = \| \overleftarrow{ب} \|$ × متجه وحدة فى اتجاهه

$$= ٦ \times \frac{(-١ ، ٢ ، ٢)}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}} = ٦ \times \frac{(-١ ، ٢ ، ٢)}{٣} = (-٢ ، ٤ ، ٤)$$

$\overleftarrow{ب} = \pm (-٢ ، ٤ ، ٤)$

حل آخر

$\overleftarrow{ب} = ك \overleftarrow{أ}$

$\| \overleftarrow{ب} \| = \| ك \overleftarrow{أ} \| = |ك| \| \overleftarrow{أ} \|$

$٦ = |ك| \times ٣$ $\qquad \therefore |ك| = ٢$ $\qquad \therefore ك = \pm ٢$

$\overleftarrow{ب} = \pm ٢ \overleftarrow{أ} = \pm ٢ (-١ ، ٢ ، ٢) = \pm (-٢ ، ٤ ، ٤)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣ اثبت ان النقاط ﻫ ، ب ، حـ على استقامة واحدة حيث ﻫ = (١ ، ٢ ، ٣) ، ب = (٤ ، ٠ ، ٤) ، حـ = (-٢ ، ٤ ، ٢)

الحل

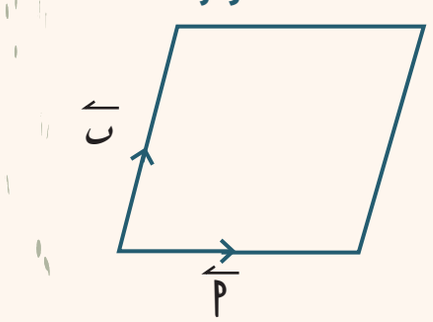
$\overleftarrow{هب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{ه} = (٣ ، ٢- ، ١)$

$\overleftarrow{بحـ} = \overleftarrow{حـ} - \overleftarrow{ب} = (٢- ، ٤ ، ٦-)$

$\overleftarrow{هب} \times \overleftarrow{بحـ} = \overleftarrow{و}$

∴ النقاط على استقامة واحدة

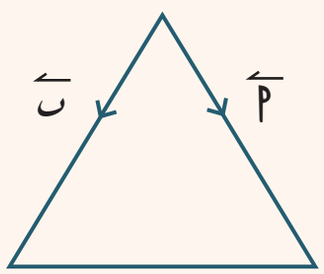
مساحة المتوازى



$\| \overleftarrow{ه} \times \overleftarrow{ب} \|$ حيث $\overleftarrow{ه}$ ، $\overleftarrow{ب}$

متجهين متجاورين

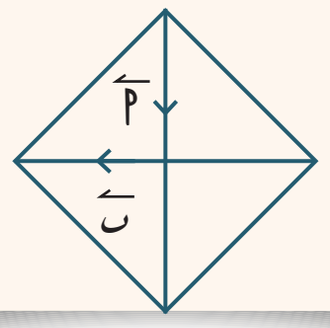
مساحة المثلث



$\frac{١}{٢} \| \overleftarrow{ه} \times \overleftarrow{ب} \|$ حيث $\overleftarrow{ه}$ ، $\overleftarrow{ب}$

ضلعين متجاورين

مساحة أى شكل رباعى



$\frac{١}{٢} \| \overleftarrow{ه} \times \overleftarrow{ب} \|$ حيث $\overleftarrow{ه}$ ، $\overleftarrow{ب}$

قطر الشكل الرباعى

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال

أوجد مساحة متوازى الاضلاع الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

حيث $\overrightarrow{أ} = (٣، ٦، ٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٦، -٢، -٤)$

الحل

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٣ & ٦ & ٣ \\ -٦ & -٢ & -٤ \end{vmatrix} = -١٨\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص} + ٣٠\overrightarrow{ع}$$

$$= \sqrt{(١٨)^٢ + (٦)^٢ + (٣٠)^٢} = ٦\sqrt{٣٥}$$

الضرب الثلاثى القياسى

كمية قياسية $= \overrightarrow{أ} . (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ})$

- حجم متوازي السطوح
- ارتفاع متوازي السطوح
- إثبات أن أ ، ب ، حـ تقع في مستوى واحد

مثال

أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاث أحرف متجاورة يمثلها المتجهات

$\overrightarrow{أ} = (١، ٢، -١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-١، ٢، ٢)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (٢، ٠، ١)$

الحل

$$\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ -١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ١٦$$

$\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}$

$\overrightarrow{حـ} . \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

ملحوظة هامة جداً

ارتفاع متوازي السطوح

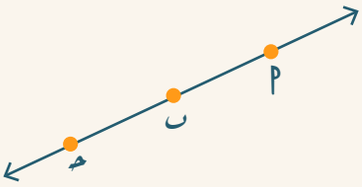
$$\therefore ع = \frac{|\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}|}{||\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}||}$$ حيث ب ، ج هما متجهى القاعدة

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع ، الارتفاع = $\frac{\text{الحجم}}{\text{مساحة القاعدة}} = \frac{|\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}|}{||\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}||}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

معادلة المستقم فى الفراغ

متجه الاتجاه للمستقيم

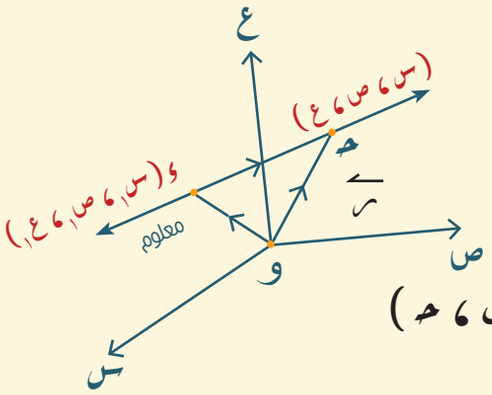


$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{هـ}$ $\quad$ $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{هـ}$

$\overrightarrow{بأ} = \overrightarrow{هـ}$ $\quad$ $\overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{هـ}$

يوجد عدد لا نهائي من متجهات الاتجاه للمستقيم

الصور المختلفة لمعادلة المستقيم



- $\overrightarrow{وؤ} + \overrightarrow{ؤحـ} = \overrightarrow{وحـ}$
- $\overrightarrow{وحـ} = \overrightarrow{ر}$ $\quad$ • $\overrightarrow{ؤحـ} = \overrightarrow{هـ}$

الصورة المتجهة ← $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ؤ} + ك \overrightarrow{هـ}$

- $(س، ص، ع) = (س_١، ص_١، ع_١) + ك (أ، ب، حـ)$

الصورة الوسيطية ←
$س = س_١ + أ ك$
$ص = ص_١ + ب ك$
$ع = ع_١ + ك حـ$

الصورة الأحداثية ← $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{حـ}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

س أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، -١، ٥) ومتجه الاتجاه له هو (٣، ٤، ٢)

الحل

$\overleftarrow{ر} = (٢، -١، ٥) + ك (٣، ٤، ٢)$ ← الصورة المتجهة

$س = ٢ + ٣ك$ ، $ص = -١ + ٤ك$ ، $ع = ٥ + ٢ك$ ← المعادلات البارامترية

$\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص + ١}{٤} = \frac{ع - ٥}{٢}$ ← الصورة الأحداثية

ملاحظات تضرب نار

1 $\overleftarrow{هـ} = (أ، ب، ٠)$

$\overleftarrow{هـ} = (أ، ب، ٠)$ المستقيم // المستوى س ص

$\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و} + ك (أ، ب، ٠)$

- $(س، ص، ع) = (س_١، ص_١، ع_١) + ك (أ، ب، ٠)$
- $س = س_١ + أك$ ، $ص = ص_١ + ب ك$ ، $ع = ع_١$

إذا كانت ع ≠ صفر ← المستقيم // المستوى س ص

إذا كانت ع = صفر ← المستقيم يقع داخل المستوى س ص

ملحوظة خطيرة

$\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب}$ ، $ع = ع_١$

لاحظ $\frac{س - ٥}{٣} = \frac{ص - ٣}{٤}$ ، $ع = ٥$ ← متجه اتجاهه ← $\overleftarrow{هـ} = (٣، ٤، ٠)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

2 $\overleftarrow{هـ} = (P، ٠، حـ)$

$\overleftarrow{هـ} = (P، ٠، حـ)$ المستوى // المستوى س ع

$\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و} + ك \overleftarrow{هـ}$

• س = $س_١ + P ك$ ، ص = $ص_١$ ، ع = $ع_١ + حـ ك$

$$\frac{س - س_١}{P} = \frac{ع - ع_١}{حـ} ، ص = ص_١$$

إذا كانت ص ≠ صفر المستقيم // المستوى س ع

إذا كانت ص = صفر المستقيم يقع فى المستوى س ع

3 $\overleftarrow{هـ} = (٠، ب، حـ)$

$\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و} + ك \overleftarrow{هـ}$

• س = $س_١$ ، ص = $ص_١ + ب ك$ ، ع = $ع_١ + حـ ك$

$$س = س_١ ، \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{حـ}$$

4 $\overleftarrow{هـ} = (P، ٠، ٠)$

• س = $س_١ + P ك$ ، ص = $ص_١$ ، ع = $ع_١$ ← المعادلات البارامترية

ص = $ص_١$ ، ع = $ع_١$ ← الصورة الأحداثية

5 $\overleftarrow{هـ} = (٠، ب، ٠)$

• ص = $ص_١ + ب ك$ ، س = $س_١$ ، ع = $ع_١$ ← المعادلات البارامترية

س = $س_١$ ، ع = $ع_١$ ← الصورة الأحداثية

5 $\overleftarrow{هـ} = (٠، ٠، ١، حـ)$

- $ع = ع_{١} + حـ ك$ ، $س = س_{١}$ ، $ص = ص_{١}$ ← المعادلات البارامترية

$س = س_{١}$ ، $ص = ص_{١}$ ← الصورة الأحداثية

معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، ١-، ٥)

ويوازي محور س	ويوازي محور ص	ويوازي محور ع
$ص = -١$ ، $ع = ٥$	$س = ٢$ ، $ع = ٥$	$س = ٢$ ، $ص = -١$

- معادلة محور **س** هي : $ص = ٠$ ، $ع = ٠$
- معادلة محور **ص** هي : $س = ٠$ ، $ع = ٠$
- معادلة محور **ع** هي : $س = ٠$ ، $ص = ٠$

لاحظ أن

جيوب تمام زوايا الاتجاه للمستقيم تمثل متجه اتجاه للمستقيم

إذا كان المستقيم يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات

فإن: $\overleftarrow{هـ} = (١، ١، ١)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل

$\overrightarrow{ر} = ك \overrightarrow{هـ}$ ⟸ الصورة المتجهه

$س = أ ك ، ص = ب ك ، ع = جـ ك$ ⟸ الصورة البارامترية

$\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{جـ}$ ⟸ الصورة الاحداثية

ملحوظة خطيرة

لو اعطاك الصورة الاحداثية وطلب منك النقطة ومتجه الاتجاه:

$$\frac{س - ٣}{٥} = \frac{ص + ٤}{٢} = \frac{ع - ٣}{٧}$$

النقطة التي ∋ المستقيم هي: $(٣ ، -٤ ، ٣)$

خد البسط = صفر وهتطلع معاك بسهولة

$\overrightarrow{هـ} (٥ ، ٢ ، ٧)$ ⟸ $\left(\frac{\text{المقام}}{\text{معامل س}} ، \frac{\text{المقام}}{\text{معامل ص}} ، \frac{\text{المقام}}{\text{معامل ع}} \right)$

الزاوية بين مستقيمين

$$\text{جتا } \theta = \frac{|\overrightarrow{هـ_١} . \overrightarrow{هـ_٢}|}{\|\overrightarrow{هـ_١}\| \, \|\overrightarrow{هـ_٢}\|}$$

المستقيمان المتوازيان

$ل_١ = (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ $\quad ل_٢ = (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$

$\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢} =$ ثابت

خلي بالك يكونوا متوازيان ومنطبقان

إزاي أعرف؟

- خذ نقطة من المستقيم الأول وعوض بها في المستقيم الثاني.
- لو حققت المعادلة يبقى منطبقان.
- لو لم تحقق يبقى متوازيان فقط.

المستقيمان المتعامدان

إذا كان $\vec{هـ_1} \cdot \vec{هـ_2} = صفر$

المستقيمان المتقاطعان والمتخالفان

- المستقيمان المتوازيان: يجمعهما مستوى واحد.
- المستقيمان المتقاطعان: يجمعهما مستوى واحد.
- المستقيمان المتخالفان: لا يتقاطعان، ولا يتوازيان، ولا يجمعهما مستوى واحد.

لإثبات أن المستقيمين متخالفان:

س اثبت أن المستقيمين $ل_1 : ر = (1، 2، 4) + ك_1 (4، -2، 2)$
$ل_2 : ر = (1، 1، 1) + ك_2 (-6، 21، 33)$ متعامدان متخالفان

الحل

لاثبات التعامد $\Longleftarrow$ $\vec{هـ_1} \cdot \vec{هـ_2} = صفر$

$ل_1 : س = 1 + 4ك_1$ $\quad ص = 2 - 2ك_1$ $\quad ع = 4 + 2ك_1$

$ل_2 : س = 1 - 6ك_2$ $\quad ص = 1 + 21ك_2$ $\quad ع = 1 + 33ك_2$

$1 + 4ك_1 = 1 - 6ك_2$ ، $2 - 2ك_1 = 1 + 21ك_2$

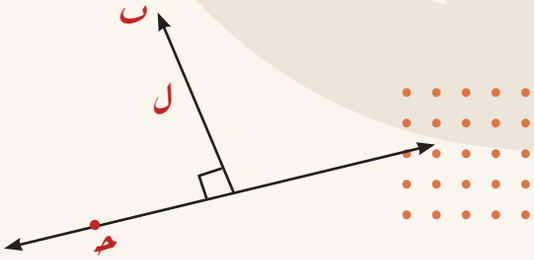
هحلهم مع بعض هيطلع $ك_1 = \frac{-1}{12}$ ، $ك_2 = \frac{1}{18}$

هعوضهم بيهم في المعادلة الثالثة

$4 + 2ك_1 = 1 + 33ك_2$ هيطلع الطرفان غير متساويان

∴ المستقيمان متحالفان

طول العمود المرسوم من نقطة علي المستقيم



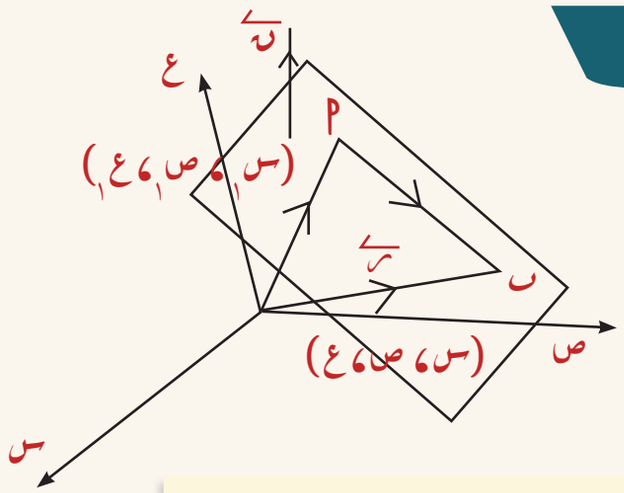
$$ل = \frac{||\vec{ب حـ} \times \vec{هـ}||}{||\vec{هـ}||}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

معادلة المستوي في الفراغ

$\overleftarrow{ن} = (أ ، ب ، حـ)$

متجهه اتجاه عمودي علي المستوي



$\overleftarrow{ن} . \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} . \overleftarrow{أ}$

المعادلة المتجهه

$أ(س - س_١) + ب(ص - ص_١) + حـ(ع - ع_١) = صفر$ ⟹ القياسية

$أس + ب ص + حـ ع - (\overleftarrow{ن} . \overleftarrow{أ}) = صفر$
$أس + ب ص + حـ ع + و = صفر$ ⟹ العامة

$و = - (\overleftarrow{ن} . \overleftarrow{أ})$

مثال توضيحي:

أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستوي المار بالنقطة (٢ ، -٣ ، ٥)
والمتجهه $\overleftarrow{ن} = (-١ ، ٢ ، ٣)$ عمودياً عليه

الحل

$\overleftarrow{ن} . \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} . \overleftarrow{أ}$

$(-١ ، ٢ ، ٣) . \overleftarrow{ر} = (-١ ، ٢ ، ٣) . (٢ ، -٣ ، ٥)$

$(-١ ، ٢ ، ٣) . \overleftarrow{ر} = ٧$

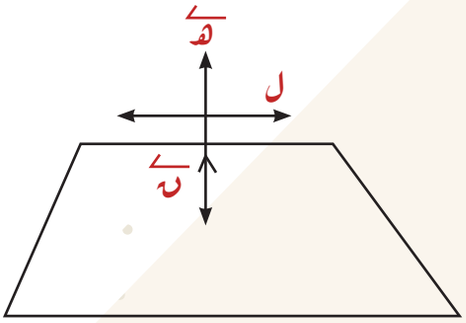
$-١(س - ٢) + ٢(ص + ٣) + ٣(ع - ٥) = ٠$

$أس + ب ص + حـ ع + و = ٠ \Longleftarrow -س + ٢ص + ٣ع - ٧ = ٠$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملحوظة خطيرة

لإثبات أن المستقيم يوازي المستوي



$\overleftarrow{هـ} \cdot \overleftarrow{ن} = صفر$

- إذا كان المستقيمان متقاطعان وطلب معادلة المستوى

الذي يحويهما: نقطة ⟸ خذ أي نقطة تعجبك

$\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{هـ_1} \times \overleftarrow{هـ_2}$

- إذا كان المستقيمان متوازيان وطلب معادلة المستوى

الذي يحويهما: نقطة ⟸ خذ أي نقطة تعجبك

$\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{هـ_1}$ أو $\overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{هـ_2}$

حيث أ نقطة ∋ للمستقيم الأول ب نقطة ∋ للمستقيم الثاني

هنا مش هينفع أجيب $\overleftarrow{ن_1} = \overleftarrow{هـ_1} \times \overleftarrow{هـ_2}$ لأنهم متوازيان والضرب الاتجاهي ليهم هيكون = $\overleftarrow{و}$

لايجاد معادلة مستوى يمر بثلاث نقاط (أ) (ب) (جـ) ليسوا على استقامة واحدة:

$\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{ب جـ}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

س أوجد نقطة تقاطع المستقيم ٢س = ٣ص − ١ = ع − ٤
مع المستوي ٣س + ص − ٢ع = ٥

الحل

حل المعادلتين مع بعض
من معادلة المستوي ص = ٥ + ٢ع − ٣س ⟸ بالتعويض في معادلة المستقم
٢س = ٣ (٥ + ٢ع − ٣س) − ١ = ع − ٤
٢س = ١٥ + ٦ع − ٩س − ١ = ع − ٤
٢س = ١٤ + ٦ع − ٩س = ع − ٤

٢س = ١٤ + ٦ع − ٩س	٢س = ع − ٤
١١س − ٦ع = ١٤	٢س − ع = − ٤
بالآلة س = − ٣٨	ع = − ٧٢

بالتعويض ص = − ٢٥

س اثبت أن المستقيم $\overleftarrow{ل}$ = (١، ٢، ٣) + ك (٣، ١، −١٤)
يقع في المستوي ٤س + ٢ص + ع = ١١

الحل

ملاحظات خطيرة

هـ = صفر $\overleftarrow{ن}$ = (م، ب، ٠) متجه الاتجاه // المستوي س ص ∴ المستوي // محور ع ∴ المستوي ⊥ المستوي س ص هـ = صفر و = صفر المستوي يحوي محور ع	ب = صفر $\overleftarrow{ن}$ = (م، ٠، هـ) متجه الاتجاه // المستوي س ع ∴ المستوي // محور ص ∴ المستوي ⊥ المستوي س ع ب = صفر و = صفر المستوي يحوي محور ص	م = صفر $\overleftarrow{ن}$ = (٠، ب، هـ) متجه الاتجاه // المستوي ص ع ∴ المستوي // محور س ∴ المستوي ⊥ المستوي ص ع م = صفر و = صفر المستوي يحوي محور س

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

اللي يصغر أوازية و اللي موجود علية عمودي علية

$\overrightarrow{ن} = (٠، ٠، حـ)$ ، $ب = صفر$ ، $أ = صفر$	$\overrightarrow{ن} = (أ، ٠، ٠)$ ، $حـ = صفر$ ، $ب = صفر$	$\overrightarrow{ن} = (٠، ب، ٠)$ ، $أ = صفر$ ، $ب = صفر$
متجه الاتجاه // محور ع	متجه الاتجاه // محور س	متجه الاتجاه // محور ص
المستوي // المستوي س ص	المستوي // المستوي ص ع	المستوي // المستوي س ع
المستوي ⊥ محور ع	المستوي ⊥ محور س	المستوي ⊥ محور ص

- معادلة المستوي س ص هي ← ع = صفر
- معادلة المستوي ص ع هي ← س = صفر
- معادلة المستوي س ع هي ← ص = صفر

معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، ٣، ٥)

- ويوازي المستوي س ص هي ← ع = ٥
- ويوازي المستوي س ع هي ← ص = ٣
- ويوازي المستوي ص ع هي ← س = ٢

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

معادلة المستوي بمعلومية الأجزاء المقطوعة من محاور الأحداثيات

$$\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = 1$$

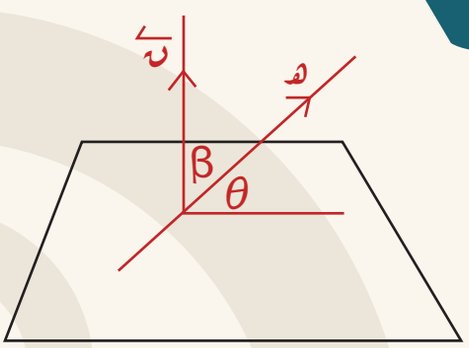
س أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٠٫٦ ، ٠) ، (٠ ، −٠٫٥ ، ٠) (٠ ، ٠٫٦ ، −٧)

الحل

$$\frac{س}{٣} + \frac{ص}{-٥} + \frac{ع}{-٧} = 1$$

لو وصلنا الثلاث نقاط مع نقطة الأصل هيتكون هرم حجمه = $\frac{1}{6}$ | $س_1 ص_1 ع_1$ |

لايجاد قياس الزاوية بين مستقيم ومستوى



$$جتا\ \beta = \frac{|\overrightarrow{هـ} . \overrightarrow{ن}|}{||\overrightarrow{هـ}|| \times ||\overrightarrow{ن}||}$$

$$\beta =$$

$$\theta = ٩٠ - \beta =$$

مسقط نقطة على مستوى

س أوجد مسقط النقطة (١ ، ٢٫٦ ، −١) على المستوى ٢س + ٣ص − ع + ٥

الحل

$\overrightarrow{ر} = (١ ، ٢٫٦ ، -١) + ك (٢ ، ٣٫٦ ، -١)$ ودي معادلة المستقيم

وبعدين هنجيب نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى:

$س = (١ + ٢ك) ، ص = (٢ + ٣ك) ، ع = (-١ - ك)$

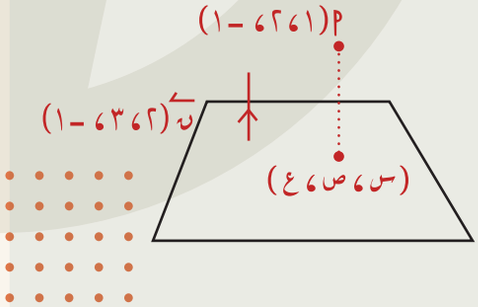
$٢س + ٣ص - ع + ٥ = ٠$

$٢(١ + ٢ك) + ٣(٢ + ٣ك) - (-١ - ك) + ٥ = ٠$

$ك = -١$ بالتعويض

$س = -١ \quad ص = -١ \quad ع = ٠$

$(-١ ، -١ ، ٠)$



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ

الزاوية بين مستويين

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\vec{ن}_1 . \vec{ن}_2|}{||\vec{ن}_1|| \, ||\vec{ن}_2||}$$

المستويان متوازيان

$$\vec{ن}_1 \times \vec{ن}_2 = \vec{و}$$

$\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} \neq \frac{د_1}{د_2}$ ⟸ مستويان متوازيان

$\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} = \frac{د_1}{د_2}$ ⟸ مستويان منطبقان

$\vec{ن}_1 . \vec{ن}_2 = 0$ ⟸ مستويان متعامدان

معادلة المستقيم الناتج عن تقاطع مستويين

$س + ص + 2ع + 1 = 0$ $\quad$ $2س + ص - ع + 1 = 0$

الطريقة الأولي

$$\vec{هـ} = \vec{ن}_1 \times \vec{ن}_2$$

وبعد ذلك، نجد نقطة ⟵ عوض عن $س = 0$ في المعادلتين

وهات $ص$ ، $ع$ واصبح معاك نقطة وكون المعادلة

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الطريقة الثانية

هطير مجهولين

نضرب المعادلة (١) × − ١

$$\begin{array}{r} -س - ص - ٢ع - ١ = ٠ \\ ٢س + ص - ع + ١ = ٠ \\ \hline س - ٣ع = ٠ \end{array}$$

$$س = ٣ع$$

نضرب المعادلة (٢) × ٢

$$\begin{array}{r} ٤س + ٢ص - ٢ع + ٢ = ٠ \\ س + ص + ٢ع + ١ = ٠ \\ \hline ٥س + ٣ص + ٣ = ٠ \end{array}$$

$$\frac{٥}{٥}\ س = \frac{-٣ص - ٣}{٥} \qquad س = \frac{-٣ص - ٣}{٥}$$

$$\therefore س = \frac{-٣ص - ٣}{٥} = ٣ع$$

طول العمود الساقط من نقطة على مستوى

$$ل = \frac{|\overrightarrow{أك} \cdot \overrightarrow{ن}|}{||\overrightarrow{ن}||}$$

حيث أ نقطه ∋ للمستوي

ك النقطة المطلوب البعد عنها

لاحظ

بعد نقطة عن مستقيم

$$ل = \frac{||\overrightarrow{حو} \times \overrightarrow{هـ}||}{||\overrightarrow{هـ}||}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizK